CdL in Matematica, Istituzioni di Probabilità (773AA)

A.A. 2023/24 - Appello del 2024-07-16

La durata della prova è di **120 minuti**. *Fornire risposte dettagliate.*

Problema 1

Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false (in generale), fornendo giustificazioni adeguate.

1. Esiste un processo gaussiano reale centrato $(X_s)_{s\geq 0}$ avente funzione di covarianza $\mathbb{E}\left[X_s X_t\right] = \exp\left(-\max\{s,t\}\right)$, per $s,t \geq 0$.
2. Se $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una martingala a tempi discreti di quadrato integrabile, allora esiste un unico processo (a meno di modificazioni) $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ che sia $\mathbb{P}$-q.c. crescente, nullo in 0 e adattato (rispetto alla stessa filtrazione della martingala) tale che $(M_n^2 - A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sia una martingala.
3. Se $(B_t)_{t\geq 0}$ è un moto browniano reale, allora il processo $M_t := \int_0^t e^{s-t} dB_s$, per $t \geq 0$, è una martingala continua.
4. Ogni soluzione dell'equazione differenziale stocastica $dX_t = X_t^2(dt + dB_t)$ è tale che $\lim_{t\to\infty} X_t = +\infty$.

Una soluzione:

1. Vera. Sia $H = L^2((0,\infty), e^{-r}dr)$ e poniamo $h_s := I_{[s,\infty)}$. Allora

$$\langle h_s, h_t\rangle = \int_0^\infty I_{[\max\{s,t\},\infty)}(r) e^{-r} dr = e^{-\max\{s,t\}},$$

quindi la funzione $(s,t) \mapsto \exp\left(-\max\{s,t\}\right)$ è semi-definita positiva. Ne segue che esiste un processo gaussiano centrato con tale funzione di covarianza.

2. Falsa. Si consideri il seguente esempio: $M_n = \sum_{i=1}^n X_i$, dove le X_i sono i.i.d. gaussiane standard e la filtrazione naturale (ossia quella generata dalle X_i). Allora per ogni $k < n$, si ha (usando l'ortogonalità degli incrementi)

$$\mathbb{E}\left[M_n^2 | \mathcal{F}_k\right] = \mathbb{E}\left[(M_n - M_k)^2 | \mathcal{F}_k\right] + M_k^2 = (n-k) + M_k^2. \tag{1}$$

Perciò $A_n = n$ è un possibile processo. Tuttavia un'altra possibilità è data da $A_n = \sum_{i=1}^n X_i^2$. Infatti vale pure

$$\mathbb{E}\left[A_n | \mathcal{F}_k\right] = (n-k) + A_k \tag{2}$$

e quindi $M_n^2 - A_n$ è una martingala. Fallisce quindi l'unicità, che invece si ottiene se si richiede che A_n sia *prevedibile*, ossia $A_0 = 0$ costante e per $n \geq 1$, A_n sia $\mathcal{F}_{n-1}$-misurabile.

3. Falsa: si ha $M_t = e^{-t}\int_0^t e^s dB_s = e^{-t} N_t$, dove N_t è una martingala (non identicamente nulla) e quindi

$$\mathbb{E}\left[M_t | \mathcal{F}_s\right] = e^{-t} N_s \neq e^{-s} N_s = M_s. \tag{3}$$

4. Falsa: basta notare che il processo $X_t = 0$ è soluzione dell'equazione differenziale.

Problema 2

Si consideri la relazione di equivalenza su $\mathbb{R}$ data da

$$x \sim y \quad \Leftrightarrow \quad x - y \in \mathbb{Z},$$

sia $\mathbb{T}^1 = \mathbb{R}_{/\sim}$ l'insieme quoziente, munito della topologia quoziente, che lo rende uno spazio metrico compatto (non serve dimostrarlo) e sia $\pi : x \mapsto \pi(x) = [x]$ la mappa quoziente. Sia inoltre $(B_t)_{t \geq 0}$ un moto browniano reale e si ponga

$$X_t := \pi(B_t) \quad \text{per } t \geq 0. \tag{4}$$

Mostrare che

1. X è di Markov omogeneo (fornire un'espressione per la funzione di transizione),
2. ogni funzione del tipo $f([x]) = \tilde{f}(x)$ dove $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è C^2 e periodica di periodo 1 appartiene al dominio del generatore di X,
3. se $f : \mathbb{T}^1 \to \mathbb{R}$ è come nel punto precedente e inoltre $(f(X_t))_{t \geq 0}$ è una martingala, allora f è costante,
4. il limite $\lim_{t \to \infty} X_t$ non esiste $\mathbb{P}$-q.c.,
5. vale il limite in legge $\lim_{t \to \infty} X_t = \pi(Z)$ dove Z è una variabile uniforme continua su $[0, 1]$, ossia per ogni funzione continua $f : \mathbb{T}^1 \to \mathbb{R}$ si ha $\lim_{t \to \infty} \mathbb{E}[f(X_t)] = \mathbb{E}[f(\pi(Z))]$. *(Sugg: usare la densità dei polinomi trigonometrici)*

Una soluzione:

1. Mostriamo che X è un processo di Markov omogeneo rispetto alla filtrazione del moto Browniano B, con funzione di transizione

$$p_t^X([x], A) = p_t^B(x, \pi^{-1}(A)) = \mathcal{N}(x, t)(\pi^{-1}(A)). \tag{5}$$

Infatti, vale

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_{s+t} \in A | \mathcal{F}_s) &= \mathbb{P}(\pi(X_{s+t}) \in A | \mathcal{F}_s) = \mathbb{P}(B_{s+t} \in \pi^{-1}(A) | \mathcal{F}_s) \\ &= \mathcal{N}(B_s, t)(\pi^{-1}(A)). \end{aligned} \tag{6}$$

2. Osserviamo che ogni funzione Borel $f : \mathbb{T}^1 \to \mathbb{R}$ è del tipo $f([x]) = \tilde{f}(x)$ per $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Borel periodica di periodo 1. Inoltre, vale l'identità $P_t^X f(x) = P_t^B \tilde{f}(\pi(x))$, dove indichiamo con P_t^X il semigruppo associato a X e P_t^B quello associato a B. Se $\tilde{f}$ è C^2 allora per la formula di Itô

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{P_t^B \tilde{f} - \tilde{f}}{t} = \frac{1}{2} \tilde{f}'' \tag{7}$$

e pertanto

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{P_t^X f - f}{t} = \frac{1}{2} \tilde{f}''. \tag{8}$$

3. Se fosse una martingala, essendo f continua in particolare sarebbe limitata e quindi il limite $\lim_{t\to\infty} f(X_t)$ esiste q.c. Tuttavia l'argomento del punto sucessivo mostra che ogni punto $[x]$ è visitato infinite volte, quindi se f non fosse costante il limite non può esistere.

4. Sappiamo che $\liminf_{t\to\infty} B_t = -\infty$, $\limsup_{t\to\infty} B_t = \infty$, pertanto ogni $x \in \mathbb{R}$ è visitato infinite volte dal moto browniano. Ne segue che ogni $[x] \in \mathbb{T}^1$ è visitato infinite volte dal processo X e quindi il limite non può esistere $\mathbb{P}$-q.c.

5. Per il suggerimento di densità è sufficiente considerare polinomi trigonometrici $f(x) = \sum_k a_k \exp(2\pi ikx)$ (dove la somma è finita). Ne segue quindi che basta mostrare, per ogni $k \neq 0$, che

$$0 = \lim_{t\to\infty} \mathbb{E}\left[\exp(2\pi ikX_t)\right] = \lim_{t\to\infty} \mathbb{E}\left[\exp(2\pi ikB_t)\right] = \lim_{t\to\infty} e^{-(2\pi k)^2 t/2}. \tag{9}$$